Concours de Jeux Mathématiques
automne 2012

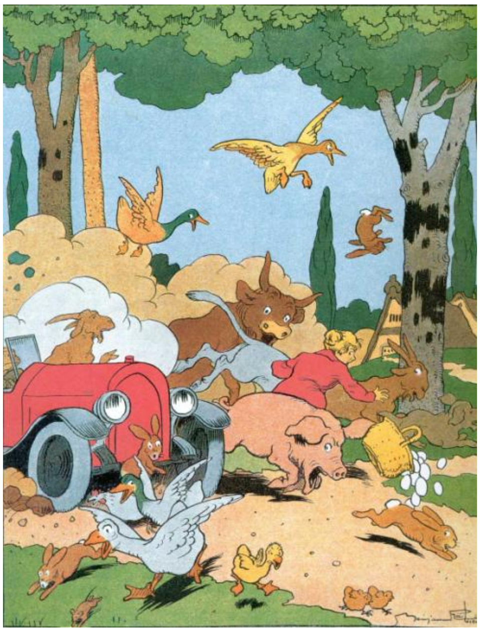
Réf : GH / courriel gilles.hainry@univ-lemans.fr

Les réponses

Q.I.

- a) Grosse pagaille (énigme 1. Elèves de l'école primaire)

De 1923 à 1939, Benjamin RABIER, auteur illustrateur, a réalisé seize albums de Gédéon le canard, au rythme approximatif de un par an. Dans Gédéon mécano, paru en 1927, Gédéon, Placide le chien et le singe Bout-de-Zan sèment la terreur avec une belle automobile rouge.L'image ci-contre, extraite de cet album, montre comment la panique s'empare des uns et des autres à l'approche de la voiture conduite par Bout-de-Zan que l'on aperçoit à gauche, derrière le pare-brise : tout le monde s'enfuit, qui à toutes jambes, qui à toutes pattes, qui à tire d'aile…



Combien y a-t-il d'animaux sur cette image ?

a) 16 b) 17 c) 18 d) 19 e) 20

Solution : On trouve sur cette image 9 animaux à deux pattes (4 canards ; 1 caneton ; 1 poule ; 2 poussins et 1 singe) ainsi que 11 quadrupèdes (4 lapins ; 2 chèvres ; 1 chien ; 1 souris ; 1 cochon ; 1 vache et 1 grison) soit un total de 20 animaux.

Réponse e

- b) Format de papier (énigme 1. Elèves de collège)

Ancien étudiant du professeur GLYNS à l'I.U.T. « Tech de Co » de Laval (53), Anthony est un brillant géomètre qui travaille désormais chez un imprimeur mayennais réputé. Se rappelant que la trisection de l'angle est généralement impossible mais que l'on peut facilement par projection d'une graduation, partager en trois un segment « à la règle et au compas », il a mis au point un nouveau massicot ; dotée de lasers, cette machine révolutionnaire peut couper en trois n'importe quelle liasse rectangulaire, donnant ainsi trois nouvelles liasses rectangulaires de dimensions rigoureusement identiques. La machine trisectrice d'Anthony opérant toujours des coupes parallèles à la largeur d'un rectangle, un nouveau format de papier a été défini : les tiers d'une grande feuille ont le même rapport Longueur/largeur que la feuille initiale… Et, bien sûr, il en est de même si l'on recoupe en trois les nouvelles feuilles obtenues etc … La grande feuille de départ a une largeur de 530 millimètres.

Quelle est la longueur de cette grande feuille ? (arrondir si besoin à la réponse la plus proche)

a) 750 mm b) 901 mm c) 918 mm d) 954 mm e) 1060 mm

Solution : Seul 918 convient : coupée en trois, la feuille 918 x 530 donne trois feuilles de format 530 x 306 et l'on a 918 / 530 ainsi que 530 / 306 qui sont tous deux approximativement égaux (à 1,732).

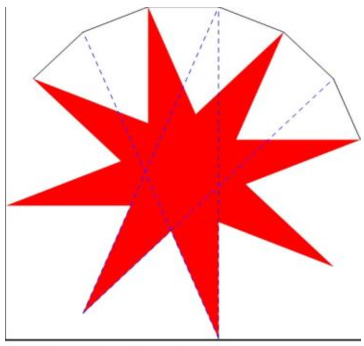
En fait, on montre que le rapport (évidemment positif) Longueur/largeur de nos feuilles est solution de l'équation $X^2 = 3$; c'est donc la racine carrée de 3, soit environ 1,732 qui multiplié par 530 donne environ 918.

Cet exercice doit faire penser aux formats plus classiques A0, A1, A2, A3, A4, A5... pour lesquels c'est la racine carrée de 2 qui exprime le rapport Longueur/largeur... On pourra sur ce sujet parcourir l'article « formats de papier » sur la page web ci-dessous :

http://perso.univ-lemans.fr/~hainry/articles/papier.html

Réponse c

- c) L'étoile rouge (énigme 1. Elèves de lycée et Grand-Public)



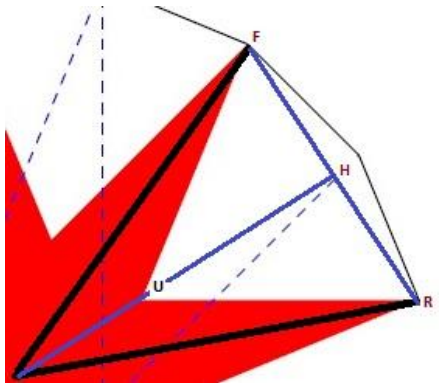
Construction de l'étoile rouge

Jeune parisien déluré et farceur en vacances en Mayenne dans la famille Glyns, Timéo, surnommé affectueusement Titi par ses timides amis campagnards, compare les logos des régions Pays de la Loire et Ile de France. Hilaire Glyns, professeur de mathématiques à l'I.U.T. « Tech de Co » de Laval saisit l'occasion pour lui soumettre une énigme mathématique :

Une étoile rouge régulière a huit branches dont les pointes font un angle de 22,5°. Son périmètre exprimé en millimètres est la somme des numéros des huit départements qui forment l'Ile de France. On cherche l'aire, en millimètres carrés, arrondie à l'unité la plus proche, de cette étoile.

Quelle est cette aire ?

a) 855 mm² b) 3778 mm² c) 4114 mm² d) 4275 mm² e) 53000 mm²



O

Solution : La figure ci-contre permet d'illustrer les calculs qui suivent (unité : le millimètre). On notera d'abord que l'Ile de France est constituée des départements 75, 77, 78, 91, 92, 93, 94, et 95 dont la somme est 695.

FU = 695/16 . angle(ROF) = 360°/8 = 45°
angle(OFR) = angle(ORF) = 135°/2 = 67,5°
angle(UFR) = angle(URF) = 67,5° - 11,25° = 56,25°

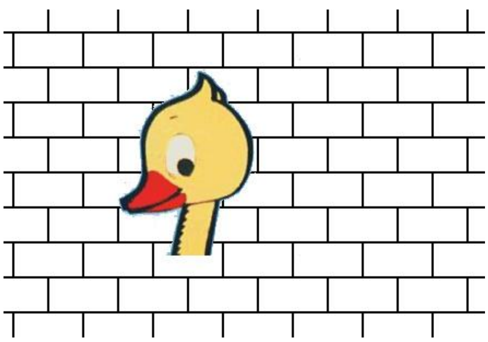
angle(FUR) = 67,50° FH = FU.sin(33,75°)
OH = OF cos(22,50°) et FH = OF.sin(22,50°)

donc OH = FH.cotan(22,50°) et, de même,
on a UH = FH.cotan(33,75°)

Aire(étoile) = 8.[aire(OFR) - aire(UFR)].
= 8.[FR.OH/2 – FR.UH/2]
= 4.FR.(OH – UH)
= 8.FH².(cotan(22,50°) - cotan(33,75°))
= 8.(695/16)².sin²(33,75°).(cotan(22,50°) - cotan(33,75°))
= 4275,182557… soit environ 4275.

Réponse d

- d) Le petit canard (énigme 2. Elèves de l'école primaire)



Matthias a dessiné et colorié une tête de canard sur un carton ; il l'a ensuite découpée et posée sur le sol carrelé à l'aide de carreaux rectangulaires disposés en quinconce… L'image située à gauche montre le résultat obtenu. Plusieurs carreaux sont recouverts en entier ou seulement en partie par le dessin de Matthias..

Quel est leur nombre ?

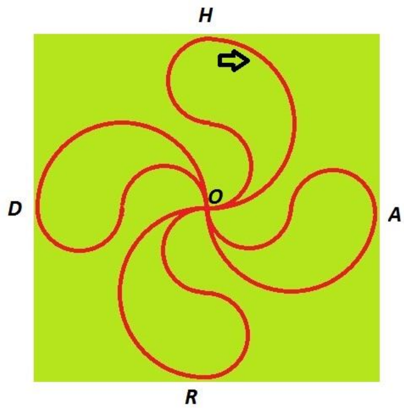
a) 11 b) 12 c) 13 d) 14 e) 15

Solution : Observons ligne après ligne les carreaux partiellement ou totalement recouverts par le dessin de Matthias. De haut en bas, il y en a 2 ; puis 3 ; puis 2 ; puis 3 ; puis 2 et enfin 1… Soit un total de 13.

Réponse c

- e) L'hélice infernale (énigme 2. Elèves de collège)

Dans un parc d'attraction, Matthias doit parcourir un sentier en forme d'hélice tracé dans un champ de maïs carré ; cette hélice a quatre pales identiques en forme de yins qui se rejoignent en *O*. Partant de *H*, Matthias parcourra le 2ème yin en passant par *A*, le 3ème en passant par *R*, le 4ème en passant par *D* et reviendra en *H* après avoir parcouru 666 mètres (voir figure). *Un yin est une figure fermée obtenue en mettant bout à bout deux demi-cercles de rayon r et un demi cercle de rayon 2r.*



Quel est le côté du carré ? (arrondir si besoin à la réponse la plus proche)

a) 35 m b) 53 m c) 72 m d) 88 m e) 106 m

Solution : Soit 8r le côté du carré. Le tour de l'hélice est constitué de quatre demi-cercles de rayon 2r et de huit demi-cercles de rayon r.

On a donc 666 = 4.Л.2r + 8.Л.r d'où = 16.Л.r et par conséquent, 8r = 666 / 2Л , soit environ 106.

Réponse e

- f) Les années terribles (énigme 2. Elèves de lycée et Grand-Public)

La somme des diviseurs propres de 2009 est 385, soit 1 + 7 + 41 + 49 + 287 ; celle de 2010 (respectivement 2011, 2012 et 2013) est 2886 (respectivement 1, 1516 et 963) ; on dit que 2010 est une année terrible car la somme de ses diviseurs propres lui est supérieure. L'année la plus terrible du XXIème siècle est celle dont la somme des diviseurs propres est maximale.

Quelle est l'année la plus terrible du XXIème siècle ?

| 2 | ? | ? | ? |

Solution : Il y a ici un piège ; en effet, le vingt-et-unième siècle a commencé le 1er janvier 2001 (et non en 2000) et s'achèvera le 31 décembre 2100 (et non en 2099).

On peut alors rechercher les diviseurs propres, puis leur somme, pour chaque nombre compris, au sens large, entre 2001 et 2100 à l'aide d'un tableur. On voit que c'est 2100 (et non 2016) qui a la somme maximale à savoir 4844 (contre 4536 pour 2016).

Réponse 2100

- g) Le code secret (énigme 3. Elèves de l'école primaire ; Collégiens ; Lycéens et Grand-Public)

Alexandre a créé un code dans lequel CANARD devient GEDEON et vice-versa ; les 18 autres lettres demeurent inchangées. Il a codé cette énigme : IL Y E NEDS LE BESSA-GRUO NU PAOA TIMRTHAA, E VRUTOA, AD MEYADDA, 53 TATAS, VRLEILLAS RU LEPIDS. RD GRMPTA EUSSI 144 PETTAS.

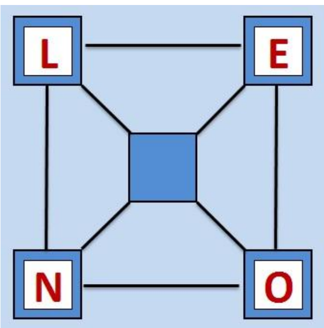
GRMBIAD Y E-T-IL NA LEPIDS ?

a) 17 b) 18 c) 19 d) 20 e) 21

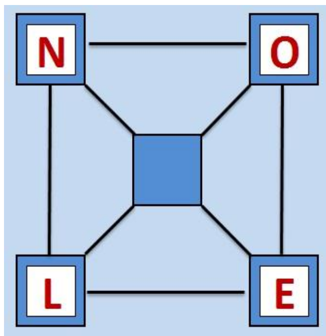
Solution : Commençons par décoder l'énigme ; cela donne : *IL Y A DANS LA BASSE-COUR DU PERE TIMOTHEE, A VOUTRE, EN MAYENNE, 53 TETES, VOLAILLES OU LAPINS. ON COMPTE AUSSI 144 PATTES. COMBIEN Y A-T-IL DE LAPINS ?* . S'il n'y avait que des volailles (ou si l'on appelait bras les pattes avant des lapins), on aurait 106 pattes ; par soustraction, on obtient 144 moins 106 soit 38 pattes de trop (les bras des lapins!) qui appartiennent aux lapins, à raison de 2 pour chacun. Il y a donc 19 lapins (38 divisé par 2).

Réponse c

- h) Le taquin (énigme 4. Elèves de l'école primaire ; Collégiens ; Lycéens et Grand-Public)



A la ferme, toute la basse-cour est en émoi : le bruit court en effet que Léon, le dindon, sera rôti à Noël ! Gédéon n'est pas étranger à cette rumeur, qui joue depuis quelques jours avec un taquin à cinq cases sur lequel se déplacent les lettres O , E , L et N. On appelle mouvement l'action consistant à faire glisser une lettre d'une case vers une case voisine vide. Gédéon veut absolument déterminer le nombre minimum de mouvements à opérer pour passer de LEON (image de gauche) à NOEL (image de droite).



Mais, quel est ce nombre minimum de mouvements ?

a) moins de 6 b) 6 c) 7 d) 8 e) plus de 8

Solution : Envoyons « L » au centre ; puis « N » en haut à gauche ; puis « L » en bas à droite ; en trois mouvements on a permuté « L » et « N » ; de la même manière, on permute « O » et « E » en trois autres mouvements. Six mouvements suffisent donc pour passer de l'image de gauche à celle de droite.

Réponse b

- i) L'anniversaire (énigme 5. Elèves de l'école primaire ; Collégiens)

La fermière est née en Mayenne (département numéro 53) au siècle dernier ; pourtant, aujourd'hui en 2012, elle n'est pas centenaire ; elle n'a même pas encore 53 ans ; mais son année de naissance est un multiple de 53.

En quelle année la fermière aura-t-elle 53 ans ?

a) 2013 b) 2014 c) 2015 d) 2016 e) 2017

Solution : La fermière (que l'on voit sur l'image de l'énigme « grosse pagaille ») a une année de naissance multiple de 53 ; elle aura 53 ans lors d'une année également multiple de 53 ; c'est naturellement 2014 (on a en effet 2014 = 53 x 38).

Réponse b

- j) Le défi d'Hilaire (énigme 5. Lycéens et Grand-Public)

La famille Glyns est en vacances à Malbo, petit village de 120 habitants (les Cassalouts), à 1170 mètres d'altitude, dans le Cantal (département numéro 15) ; hier, Hilaire, son épouse et leurs deux enfants, Pierre et Emmanuel, ont randonné jusqu'au sommet du Plomb du Cantal ; aujourd'hui, le temps est épouvantable et les Glyns restent au gite, s'occupant en faisant un peu de calcul... C'est curieux, dit Pierre, un triangle "cantalou", de côtés 13, 14 et 15 a une aire entière, 84 ; et, bizarrement, 84 m est l'altitude de l'I.U.T. de Laval. Après réflexion, Emmanuel annonce fièrement : Un triangle "mayennais", de côtés 51, 52 et 53 a lui aussi une aire entière, 1170, qui, étrangement est l'altitude en mètres de Malbo." Bravo, dit Hilaire, je vous lance un défi : trouver un triangle "himalayen" ; ses côtés sont trois entiers consécutifs ; son aire est un entier compris entre la hauteur en mètres de l'Everest et 53000.

Quelle est l'aire du triangle himalayen ?.

a) 5300 b) 9627 c) 13248 d) 16296 e) 26562

Solution : Soient k-1, k et k+1 les côtés du triangle ; on sait que son aire est comprise entre 8848 et 53000, ce qui exclut la première solution. La formule de Héron permet le calcul de l'aire S du triangle sous la forme $S = \sqrt{p.(p-a).(p-b).(p-c)}$ où a, b, c sont les côtés et p le demi-périmètre de ce triangle.

Ici $p = 1{,}5.k$; $p-a = 0{,}5.k + 1$; $p-b = 0{,}5.k$ et $p-c = 0{,}5.k + 1$
d'où $S = k.\sqrt{0{,}75.(0{,}25.k^2-1)}$

Quelques calculs effectués dans un tableur, ou à l'aide d'une calculatrice, montrent que le triangle himalayen a pour côtés 193, 194 et 195 et pour aire 16296 (et qu'il n'y a pas d'autre solution entre 8848 et 53000).

Réponse d

En résumé, les réponses sont

en catégorie « école primaire » :	**e**	**c**	**c**	**b**	**b**
en catégorie « collège » :	**c**	**b**	**c**	**b**	**b**
en catégorie « adultes » :	**d**	**2100**	**c**	**b**	**d**